

8 Tangentna ravan i normala na površ

Tangentna ravan na površ S u tački M je ravan koja prolazi kroz tačku M i ima osobinu da je rastojanje promjenjive tačke M' na površi od ove ravni kad M' teži ka M beskonačno mala veličina u poređenju sa rastojanjem MM' .

Normala površi u datoj tački površi je prava koja prolazi kroz ovu tačku i normalna je na tangentnu ravan u ovoj tački prave.

Neka je površ data vektorskom jednačinom $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$ ili u parametarskom obliku

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

gdje je Jacobijeva matrica $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$ ranga 2. Tada je vektor normale \vec{n} na površ dat sa

$$\vec{n} = (\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v), \quad \vec{r}'_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{r}'_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}.$$

Ako je površ zadata jednačinom $F(x, y, z) = 0$, tada je $\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$.

Ako je površ zadata jednačinom $z = f(x, y)$ tada je $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right)$.

5. Odrediti jednačinu tangentne ravni površi $S : x = 2u - v, y = u^2 - v^2, z = u^3 - v^3$ u tački $M_0(3, 5, 7)$ te površi.

6. Dokazati da je tangentna ravan u proizvoljnoj tački površi $(x - 2z)^m + (y - 3z)^n = 4, m, n \in \mathbb{N}$, paralelna pravoj $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$.

7. Naći tangentu na krivu $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 47 = F_1(x, y, z) = 0 \\ x^2 + 2y^2 - z = F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ u tački $M(-2, 1, 6)$.

8. Dokazati ortogonalnost sljedećih površi: (a) $xy = az^2$; (b) $x^2 + y^2 + z^2 = b$; (c) $z^2 + 2x^2 = c(z^2 + 2y^2)$.

9. Pokazati da su površi $x^2 + y^2 + z^2 = x$ i $x^2 + y^2 + z^2 = y$ ortogonalne.

10. Pokazati da sve tangentne ravni na površ $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ prolaze kroz stalnu tačku.

11. Odrediti jednačine normale i jednačinu tangentne ravni površi $z = \sqrt{169 - x^2 - y^2}$ u tački $(3; 4; z(3; 4))$.

12. Dokazati da tangentne ravni površi $z = \frac{1}{xy}$ tvore s koordinatnim ravnima piramide konstantne zapremine.

13. Površ Γ data je jednačinama

$$x = u^2 + v, \quad y = u^3 + uv, \quad z = u^4 + \frac{2}{3}u^2v.$$

Pokazati da je u svakoj tački krive $v = 0$ na toj površi oskulatorna ravan te krive istovremeno i tangentna ravan površi Γ .

14. Naći jednačinu tangentne ravni elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ koja na koordinatnim osama odsjeca jednake pozitivne odsječke.

15. Dokazati da tangentne ravni površi $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) odsjecaju od koordinatnih osa odsječke čiji je zbir jednak a .

16. Naći udaljenost ishodišta koordinatnog sistema od tangentne ravni (helikoida) $y = x \operatorname{tg} \frac{z}{a}$ u tački $(a; a; \frac{\pi a}{4})$.

17. Napisati jednačinu tangentne ravni i normale na površ $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$ u tački $M(2; 2; 1)$.

Orediti jednačinu tangentne ravni površi

$S: x=2u-v, y=u^2+v^2, z=u^3-v^3$ u tački $M_0(3,5,7)$ te površi.

Rj. Jednačina ravni ima oblik $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ gdje je $\vec{n}=(A,B,C)$ vektor normale, a (x_0, y_0, z_0) je tačka na ravni.

Prisjetimo se $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$

Ako je površ data u parametarskom obliku

$$x=x(u,v)$$

$$y=y(u,v)$$

$$z=z(u,v)$$

tada je vektor normale \vec{n} na površi dat sa

$$\vec{n} = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v, \quad \vec{r}'_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{r}'_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

$$\vec{r}'_u = (2, 2u, 3u^2)$$

$$\vec{r}'_v = (-1, 2v, -3v^2)$$

Oredimo parametre u i v za tačku $M_0(3,5,7)$.

$$2u-v=3 \Rightarrow v=2u-3$$

$$u^2+v^2=5$$

$$u^3-v^3=7$$

$$\left. \begin{array}{l} u^2+v^2=5 \\ u^3-v^3=7 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u^2+(2u-3)^2=5 \\ u^3-(2u-3)^3=7 \end{array}$$

$$u^2+4u^2-12u+9=5$$

$$5u^2-12u+4=0$$

$$D=144-80=64$$

$$u_{1,2} = \frac{12 \pm 8}{10}$$

$$u_1=2 \quad u_2 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$u=2 : v=1$$

$$u^2+v^2=5 \quad \text{tačno}$$

$$u^3-v^3=7 \quad \text{tačno}$$

$$u=\frac{2}{5} : v=\frac{4}{5}-3=-\frac{11}{5}$$

$$u^2+v^2=\frac{4}{25}+\frac{121}{25}=5 \quad \text{tačno}$$

$$u^3-v^3=\frac{8}{125}+\frac{1331}{125} \neq 7$$

ovo rješenje odpada

Prena tome $u=2, v=1$. Za ove vrijednosti imamo

$$\vec{r}_u = (2, 4, 12)$$

$$\vec{r}_v = (-1, 2, -3)$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 12 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-12-24, -(-6+12), 4+4) \\ = (-36, -6, 8)$$

$$\vec{n} = (-2) (18, 3, -4)$$

Jednačina tangente ravnice je

$$18(x-3) + 3(y-5) - 4(z-7) = 0$$

$$18x + 3y - 4z - 41 = 0$$

⊛ Dokažati da je tangenta ravan u proizvoljnoj tački površi $(x-2z)^m + (y-3z)^n = 4$, $m, n \in \mathbb{N}$, paralelna pravoj $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$.

Rj. Ako je površ zadana jednačinom $F(x, y, z) = 0$ tada je $\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$ vektor normale na površ.

(od ranije znamo da je $A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$ jednačina ravni kroz tačku $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i vektorom normale $\vec{n} = (A, B, C)$).

U našem slučaju

$$F(x, y, z) = (x-2z)^m + (y-3z)^n - 4$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = m(x-2z)^{m-1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = n(y-3z)^{n-1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = m(x-2z)^{m-1} \cdot (-2) + n(y-3z)^{n-1} \cdot (-3) = -2m(x-2z)^{m-1} - 3n(y-3z)^{n-1}$$

Vektor pravca prave $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ je $\vec{\pi} = (2, 3, 1)$.

Tangenta ravan u proizvoljnoj tački ^{date} površi će biti sa pravom akko $\vec{\pi} \cdot \vec{n} = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{\pi} \cdot \vec{n} &= 2m(x-2z)^{m-1} + 3n(x-2z)^{m-1} - 2m(x-2z)^{m-1} - 3n(y-3z)^{n-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

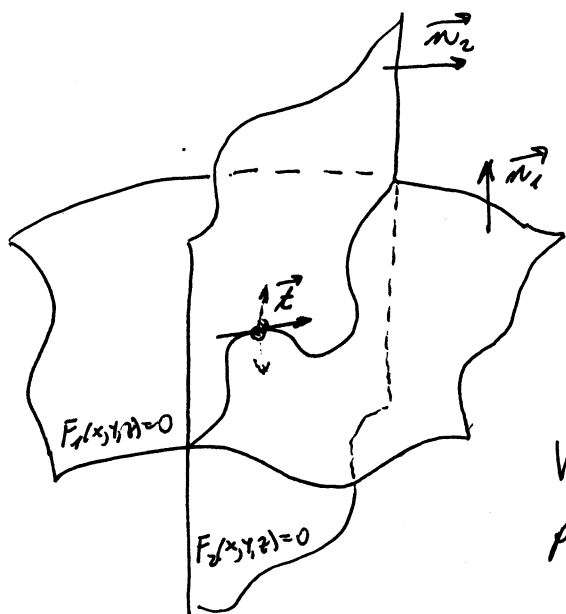
Tangentne ravni date površi su paralelne sa datom pravom.

#) Nađi tangentu na krivu

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 47 = F_1(x, y, z) = 0 \\ x^2 + 2y^2 - z = F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

u tački $M(-2, 1, 6)$.

Rj. U ovom zadatku kriva je data kao presjek dvije površi. Želimo iskoristiti vektore normale \vec{n} na date površi da bi našli vektor tangente



$$F_1(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 47 = 0$$

$$\vec{n}_1 = (4x, 6y, 2z) = 2(2x, 3y, z)$$

$$F_2(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z = 0$$

$$\vec{n}_2 = (2x, 4y, -1)$$

Vektor tangente na krivu u proizvoljnoj tački

$$\begin{cases} \vec{T} \perp \vec{n}_1 \\ \vec{T} \perp \vec{n}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{T} \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

$$\vec{T} = k(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)$$

gdje je k neki realan broj

$$\vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 3y & z \\ 2x & 4y & -1 \end{vmatrix} = (-3y - 4yz, 2x + 2xz, 2xy)$$

U tački $M(-2, 1, 6)$ je $\vec{T} = (-3 - 24, -4 - 24, -4) = (-27, -28, -4)$

Jednačina tangente u tački $M(-2, 1, 6)$ na datu krivu

je

$$\frac{x+2}{27} = \frac{y-1}{28} = \frac{z-6}{4}$$

Dokazati ortogonalnost sljedećih površi

a) $xy = az^2$,

b) $x^2 + y^2 + z^2 = b$,

c) $z^2 + 2x^2 = c(z^2 + 2y^2)$.

Rj:

Ako je površ zadata jednačinom $F(x, y, z) = 0$ tada je vektor normale \vec{n} na površ dat sa

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right).$$

Ako su \vec{n}_1, \vec{n}_2 i \vec{n}_3 obilježimo vektore normale na površi a), b) i c) u njihovoj zajedničkoj tački $M(x, y, z)$ tada je

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_1(y, x, -2az)$$

$$\vec{n}_2 = \vec{n}_2(x, y, z)$$

$$\vec{n}_3 = \vec{n}_3(2x, -2cy, z - cz)$$

npr. $F_3(x, y, z) = z^2 + 2x^2 - c(z^2 + 2y^2)$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = 4x \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = -4cy$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial z} = 2z - 2cz$$

Pokazujemo da su vektori \vec{n}_1, \vec{n}_2 i \vec{n}_3 uzajamno normalni; što znači da su i površi ortogonalne.

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (y, x, -2az) \cdot (x, y, z) = xy + xy - 2az^2 = 2xy - 2az^2 = 2(xy - az^2)$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{ovo je površ a) kaj je} \\ \text{pomnožimo sa 2} \\ M(x, y, z) \text{ je tačka na površi} \end{array} \right| = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 &= (y, x, -2az) \cdot (2x, -2cy, z - cz) = 2xy - 2cxy - 2az^2 + 2acz^2 = \\ &= 2(xy - az^2 - c(xy - az^2)) = 2(1-c)(xy - az^2) = \\ &= \left| \begin{array}{l} M(x, y, z) \text{ pripada} \\ \text{površ a)} \end{array} \right| = 0 \end{aligned}$$

$$\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = (x, y, z) \cdot (2x, -2cy, z - cz) = \underbrace{2x^2 - 2cy^2 + z^2 - cz^2}_{\text{ovo je površ c)} = 0$$

zato što tačka $M(x, y, z)$ pripada oboj površi

S time je tvrdenje zadatka dokazano.

⊕ Pokazati da su površi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = y$$

ortogonalne.

Rj.

$$x^2 + y^2 + z^2 = x$$

$$x^2 - x + y^2 + z^2 = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = y$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$$

Ovo su dvije sfere poluprecnika $\frac{1}{2}$ sa centrom u tački $A\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ odnosno $B\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Vektor normala na površi u nekoj zajedničkoj tački $M(x, y, z)$ su

$$\vec{n}_1 = (2x - 1, 2y, 2z)$$

$$\vec{n}_2 = (2x, 2y - 1, 2z)$$

Pokažimo da su vektori \vec{n}_1 i \vec{n}_2 normalni:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 4x^2 - 2x + 4y^2 - 2y + 4z^2 = 2 \underbrace{(x^2 - x + y^2 + z^2)}_{\substack{M \text{ leži na prvoj} \\ \text{sferi}}} + 2 \underbrace{(x^2 + y^2 - y + z^2)}_{\substack{M \text{ leži na} \\ \text{druvoj sferi}}} = 0 \quad \dots (*)$$

Tačku M leži na presječnoj liniji sfera, te njene koordinate zadovoljavaju jednačine $x^2 + y^2 + z^2 = x$ i $x^2 + y^2 + z^2 = y$.

Iz ovog (*) slijedi da su date površi ortogonalne.

Pokazati da sve tangentne ravni na površ

$$z = x f\left(\frac{y}{x}\right)$$

prolaze kroz istu tačku.

Rj. Ako je površ data jednačicom $z = f(x, y)$ tada je
 $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$ vektor normale \vec{n} na površ.

U našem slučaju

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= f\left(\frac{y}{x}\right) + x \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(\frac{y}{x}\right)' = f\left(\frac{y}{x}\right) + x \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot y(-1)x^{-2} = \\ &= f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\left. \begin{aligned}\vec{n} &= (A, B, C) \\ A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) &= 0\end{aligned} \right\}$$

Jednačina tangentne ravni kroz neku tačku $M(x_1, y_1, z_1)$ date površi je

$$\left[f\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{y_1}{x_1} f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \right] (x-x_1) + f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right) (y-y_1) + (-1)(z-z_1) = 0$$

Sad želimo rekonstruirati činjenicu da je $z_1 = x_1 f\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$

$$\left[f\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{y_1}{x_1} f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \right] x + f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right) y - z +$$

$$\underbrace{+(-x_1) f\left(\frac{y_1}{x_1}\right) + y_1 f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - y_1 f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right) + z_1}_{=-z_1} = 0$$

$$\left[f\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{y_1}{x_1} f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \right] x + f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right) y - z = 0$$

tangentna ravni na datu površ

Odatle vidimo da sve tangentne ravni prolaze kroz koordinatni početak.

Ⓝ Odrediti jednadžine normale i jednadžinu tangentne ravni površi $z = \sqrt{169 - x^2 - y^2}$ u tački $(3, 4, z(3, 4))$.

Rj: $z(3, 4) = \sqrt{169 - 9 - 16} = \sqrt{144} = 12$

$$M(3, 4, 12)$$

jednadžina tangentne ravni i normale na površ $z = f(x, y)$ u tački $M(p_1, p_2, p_3)$: $z - p_3 = z'_x(p_1, p_2)(x - p_1) + z'_y(p_1, p_2)(y - p_2)$

$$\frac{x - p_1}{z'_x(p_1, p_2)} = \frac{y - p_2}{z'_y(p_1, p_2)} = \frac{z - p_3}{-1}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{169 - x^2 - y^2}} (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{169 - x^2 - y^2}} \Rightarrow z'_x(3, 4) = \frac{-3}{\sqrt{169 - 25}} = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{169 - x^2 - y^2}} (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{169 - x^2 - y^2}} \Rightarrow z'_y(3, 4) = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$z - 12 = -\frac{1}{4}(x - 3) - \frac{1}{3}(y - 4) \quad | \cdot 12$$

$$12z - 144 = -3(x - 3) - 4(y - 4)$$

$$3x + 4y + 12z - 144 - 9 - 16 = 0$$

$3x + 4y + 12z - 169 = 0$ jednadžina tangentne ravni na površ z

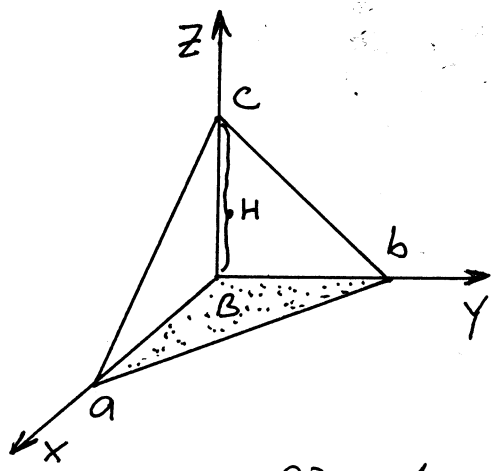
$$\frac{x - 3}{-\frac{1}{4}} = \frac{y - 4}{-\frac{1}{3}} = \frac{z - 12}{-1} \quad | \cdot \left(\frac{1}{-12}\right)$$

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 4}{4} = \frac{z - 12}{12}$$

jednadžina normale na površ z

Dokazati da tangentne ravni površi $z = \frac{1}{xy}$ tvore s koordinatnim ravnima piramide konstantne zapremine.

R. Jednačina tangentne ravni na površi $z = f(x, y)$ u tački $M(p_1, p_2, p_3)$: $z - p_3 = z'_x(p_1, p_2)(x - p_1) + z'_y(p_1, p_2)(y - p_2)$



$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ kanonični oblik jednačine ravni gdje su a, b i c odsječci koje ravan odsjeća na koordinatnim osama

$$V_{piramide} = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{\frac{a \cdot b}{2} \cdot c}{3} = \frac{a \cdot b \cdot c}{6}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2 y} \Rightarrow z'_x(p_1, p_2) = \frac{-1}{p_1^2 p_2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{y^2} = \frac{-1}{x y^2} \Rightarrow z'_y(p_1, p_2) = \frac{-1}{p_1 p_2^2}$$

$$p_3 = f(p_1, p_2) = \frac{1}{p_1 p_2}$$

$$z - \frac{1}{p_1 p_2} = \frac{-1}{p_1^2 p_2} (x - p_1) + \frac{-1}{p_1 p_2^2} (y - p_2)$$

$$p_1^2 p_2^2 z - p_1 p_2 = -p_2(x - p_1) - p_1(y - p_2)$$

$$p_1^2 p_2^2 z + p_2 x + p_1 y = p_1 p_2 + p_1 p_2 + p_1 p_2 \quad | \cdot \frac{1}{p_1 p_2}$$

$$\frac{x}{p_1} + \frac{y}{p_1} + p_1 p_2 z = 3 \quad | \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{3p_1} + \frac{y}{3p_2} + \frac{z}{p_1 p_2} = 1 \Rightarrow V_{piramide} = \frac{3p_1 \cdot 3p_2 \cdot \frac{3}{p_1 p_2}}{6} = \frac{9}{2}$$

Zapremina piramide za sve tangentne ravni na površi

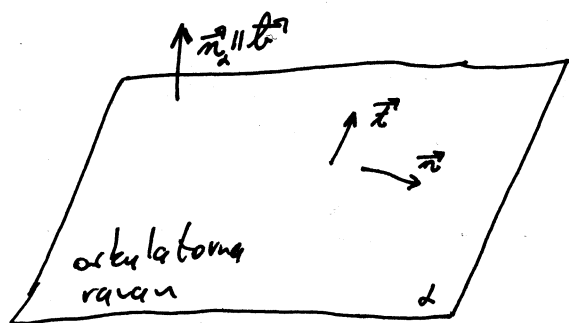
⊕ Povrch Γ data je jedvačinama

$$x = u^2 + v, \quad y = u^3 + uv, \quad z = u^4 + \frac{2}{3} u^2 v.$$

Pokazati da je u svakoj tački krive $v=0$ na toj površi oskulatorna ravan te krive istovremeno i tangenta ravan površi Γ .

Rj. Kriva $v=0$ površi Γ ima jedvačinu

$$\vec{r} = (u^2, u^3, u^4)$$



$$\vec{b} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$$

Oskulatozna ravan krive određena je vektorom $\vec{b} = \lambda(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)$

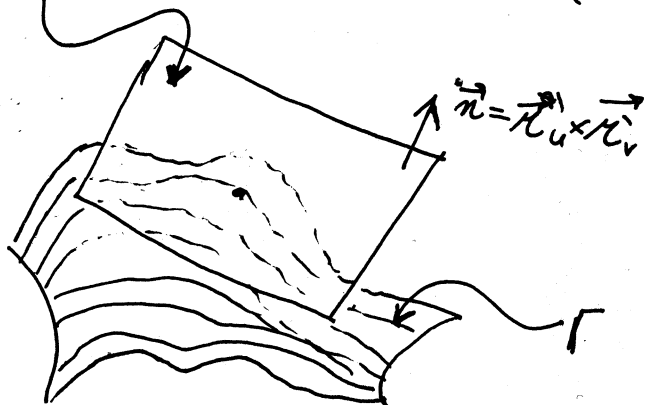
Kako je $\vec{r}_u = (2u, 3u^2, 4u^3)$, $\vec{r}_v = (1, u, 2u^2)$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2u & 3u^2 & 4u^3 \\ 1 & u & 2u^2 \end{vmatrix} = (12u^4, -16u^2, 6u^2) = 2u^2(6u^2, -8u, 3)$$

to je jedvačina oskulatodne ravni;

tangentna ravan

$$0: 6u^2(x - u^2) - 8u(y - u^3) + 3(z - u^4) = 0.$$



Tangentna ravan površi određena je vektorom $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$.
Kako je

$$\vec{r}_u = (2u, 3u^2+v, 4u^3 + \frac{4}{3}uv)$$

$$\vec{r}_v = (1, u, \frac{2}{3}u^2)$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2u & 3u^2+v & 4u^3 + \frac{4}{3}uv \\ 1 & u & \frac{2}{3}u^2 \end{vmatrix} = (-2u^4 - \frac{2}{3}u^2v, \frac{8}{3}u^3 + \frac{4}{3}uv, -u^2-v)$$

Za $v=0$ je

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-2u^4, \frac{8}{3}u^3, -u^2) = -\frac{1}{3}u^2(6u^2, 8u, 3)$$

i jednačina tangente ravnine duž krive $v=0$ glasi:

$$6u^2(x-u^2) - 8u(y-u^3) + 3(z-u^4) = 0.$$

#) Naći jednačinu tangentne ravni elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ koja na koordinatnim osama odsjeca jednake pozitivne odsječke.

Rj: Jednačina tangentne ravni na površ $F(x, y, z) = 0$ u tački $M(p_1, p_2, p_3)$ ima jednačinu $F'_x(p_1, p_2, p_3)(x-p_1) + F'_y(p_1, p_2, p_3)(y-p_2) + F'_z(p_1, p_2, p_3)(z-p_3)$

Nađimo jednačinu tangentne ravni na elipsoid u proizvoljnoj tački $M(p_1, p_2, p_3)$: (U našem slučaju $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$)

$$F'_x = \frac{1}{a^2} \cdot 2x = \frac{2x}{a^2}, \quad F'_y = \frac{2y}{b^2}, \quad F'_z = \frac{2z}{c^2}$$

$$F'_x(M) = \frac{2p_1}{a^2}, \quad F'_y(M) = \frac{2p_2}{b^2}, \quad F'_z(M) = \frac{2p_3}{c^2}$$

$$\frac{2p_1}{a^2}(x-p_1) + \frac{2p_2}{b^2}(y-p_2) + \frac{2p_3}{c^2}(z-p_3) = 0 \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{p_1}{a^2}x + \frac{p_2}{b^2}y + \frac{p_3}{c^2}z = \frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} + \frac{p_3^2}{c^2} \quad \text{Napisaćmo jednačinu ravni u kanonskom obliku}$$

$$\frac{x}{\frac{a^2}{p_1} \left(\frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} + \frac{p_3^2}{c^2} \right)} + \frac{y}{\frac{b^2}{p_2} \left(\frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} + \frac{p_3^2}{c^2} \right)} + \frac{z}{\frac{c^2}{p_3} \left(\frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} + \frac{p_3^2}{c^2} \right)} = 1$$

Odatje možemo primjetiti da ako želimo da jednačina tangentne ravni na koordinatnim osama odsjeca jednake odsječke, potrebno i dovoljno je da $\frac{a^2}{p_1} = \frac{b^2}{p_2}$, $\frac{a^2}{p_1} = \frac{c^2}{p_3}$ i $\frac{b^2}{p_2} = \frac{c^2}{p_3}$ (*)

Isto tako primjetimo da je $\frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} + \frac{p_3^2}{c^2} = 1$ (ZAŠTO?)

$$(*) \Rightarrow p_1 = \frac{a^2}{b^2} p_2, \quad p_3 = \frac{c^2}{b^2} p_2 \quad \dots (**)$$

$$\frac{x}{\frac{a^2}{\frac{a^2}{b^2} p_2}} + \frac{y}{\frac{b^2}{p_2}} + \frac{z}{\frac{c^2}{\frac{c^2}{b^2} p_2}} = 1 \quad | : p_2$$

$$\frac{x}{b^2} + \frac{y}{b^2} + \frac{z}{b^2} = \frac{1}{p_2}$$

Sad imamo i kada (1) stavimo u (***) dobijemo da je $p_2 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ prema tome:

$x+y+z = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ je jednačina tražene tangente

Dokazati da tangentne ravni površi $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) odsjecaju od koordinatnih osa odsječke čiji je zbir jednak a .

Rj. Jednačina tangentne ravni na površ $F(x, y, z) = 0$ u tački $M(p_1, p_2, p_3)$ ima jednačinu

$$F'_x(p_1, p_2, p_3)(x - p_1) + F'_y(p_1, p_2, p_3)(y - p_2) + F'_z(p_1, p_2, p_3)(z - p_3) = 0$$

Primjetimo da ako je data kriva u ravni $F(x, y) = 0$ tada jednačina tangente u tački $N(c_1, c_2)$ ima jednačinu $F'_x(c_1, c_2)(x - c_1) + F'_y(c_1, c_2)(y - c_2) = 0$ npr. jednačina tangente na krivu $y = x^2 + x - 6$ u tački $(-3, 0)$ je $y = -5x - 15$.

U našem slučaju ^{data površ je} $F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}$

$F'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $F'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, $F'_z = \frac{1}{2\sqrt{z}}$ Uzmimo ^{tačku sa površi} tačku $M(p_1, p_2, p_3)$.

$F'_x(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2\sqrt{p_1}} = \frac{\sqrt{p_1}}{2p_1}$; $F'_y(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2\sqrt{p_2}} = \frac{\sqrt{p_2}}{2p_2}$; $F'_z(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2\sqrt{p_3}} = \frac{\sqrt{p_3}}{2p_3}$

Jednačina tangentne ravni na površ u tački M

$$\frac{\sqrt{p_1}}{2p_1}(x - p_1) + \frac{\sqrt{p_2}}{2p_2}(y - p_2) + \frac{\sqrt{p_3}}{2p_3}(z - p_3) = 0$$

Napišimo jednačinu u kanonskom obliku

$$\frac{\sqrt{p_1}}{2p_1}x + \frac{\sqrt{p_2}}{2p_2}y + \frac{\sqrt{p_3}}{2p_3}z = \frac{1}{2}\sqrt{p_1} + \frac{1}{2}\sqrt{p_2} + \frac{1}{2}\sqrt{p_3} = \frac{1}{2}\sqrt{a}$$

Primjetimo da je $\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \sqrt{p_3} = \sqrt{a}$ ZAŠTO?

$$\frac{x}{\frac{p_1 \sqrt{a}}{\sqrt{p_1}}} + \frac{y}{\frac{p_2 \sqrt{a}}{\sqrt{p_2}}} + \frac{z}{\frac{p_3 \sqrt{a}}{\sqrt{p_3}}} = 1$$

$$\frac{x}{\sqrt{p_1 a}} + \frac{y}{\sqrt{p_2 a}} + \frac{z}{\sqrt{p_3 a}} = 1$$

Jednačina tangentne ravni na x -osi odsjeka $\sqrt{a} \cdot \sqrt{p_1}$, na y -osi $\sqrt{a} \cdot \sqrt{p_2}$ i na z -osi $\sqrt{a} \cdot \sqrt{p_3}$. Zbir ovih odsječaka iznosi $\sqrt{a} \sqrt{p_1} + \sqrt{a} \sqrt{p_2} + \sqrt{a} \sqrt{p_3} = \sqrt{a}(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \sqrt{p_3}) = a$

#) Nadite udaljenost ishodišta koordinatnog sistema od tangentne ravni (helikoïda) $\gamma = x \tan \frac{z}{a}$ u tački $(a, a, \frac{\pi a}{4})$.

k.) $F'_x(p_1, p_2, p_3)(x-p_1) + F'_y(p_1, p_2, p_3)(y-p_2) + F'_z(p_1, p_2, p_3)(z-p_3) = 0$
 jednačina tangentne ravni na površ $F(x, y, z) = 0$.

$$\gamma = x \tan \frac{z}{a} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\tan \frac{z}{a} \Rightarrow F'_x(a, a, \frac{\pi a}{4}) = -\tan \frac{\pi a}{4} = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 \Rightarrow F'_y(a, a, \frac{\pi a}{4}) = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{-x}{\cos^2 \frac{z}{a}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{-x}{a \cos^2 \frac{z}{a}} \Rightarrow F'_z(a, a, \frac{\pi a}{4}) = \frac{-a}{a \cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}$$

$$F'_z(a, a, \frac{\pi a}{4}) = -2$$

$$-1(x-a) + 1 \cdot (y-a) + (-2)(z - \frac{\pi a}{4}) = 0$$

$$-x + y - 2z + a - a + \frac{\pi a}{2} = 0$$

$$-x + y - 2z + \frac{\pi a}{2} = 0$$

jednačina tangentne ravni;
 helikoïda u tački $(a, a, \frac{\pi a}{4})$.

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad O(0, 0, 0)$$

$$d = \frac{0 + 0 + 0 + \frac{\pi a}{2}}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{\pi a}{2\sqrt{6}}$$

udaljenost početka koordinatnog sistema od tangentne ravni

(#) Napisati jednačinu tangentne ravni i normale na površ $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$ u tački $M(2, 2, 1)$.

R: Ako površ S ima jednačinu u implicitnom obliku $F(x, y, z) = 0$ tada jednačina tangentne ravni i normale na površ S u tački $M(p_1, p_2, p_3)$ se računaju po formuli:

$$L: F'_x(p_1, p_2, p_3)(x - p_1) + F'_y(p_1, p_2, p_3)(y - p_2) + F'_z(p_1, p_2, p_3)(z - p_3) = 0$$

$$n: \frac{x - p_1}{F'_x(p_1, p_2, p_3)} = \frac{y - p_2}{F'_y(p_1, p_2, p_3)} = \frac{z - p_3}{F'_z(p_1, p_2, p_3)}$$

$$2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$$

$$\left(\frac{x}{z}\right)'_z = (x z^{-1})'_z = (-1) x z^{-2}$$

$$F(x, y, z) = 2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} - 8 = 0$$

$$F'_x = 2^{\frac{x}{z}} \ln 2 \cdot \frac{1}{z} \Rightarrow F'_x(2, 2, 1) = 4 \ln 2$$

$$F'_y = 2^{\frac{y}{z}} \ln 2 \cdot \frac{1}{z} \Rightarrow F'_y(2, 2, 1) = 4 \ln 2$$

$$F'_z = 2^{\frac{x}{z}} \ln 2 \cdot \left(\frac{x}{z}\right)'_z + 2^{\frac{y}{z}} \ln 2 \cdot \left(\frac{y}{z}\right)'_z = -\frac{x}{z^2} 2^{\frac{x}{z}} \ln 2 - \frac{y}{z^2} 2^{\frac{y}{z}} \ln 2$$

$$= -\frac{1}{z^2} \ln 2 (x 2^{\frac{x}{z}} + y 2^{\frac{y}{z}})$$

$$F'_z(2, 2, 1) = -\ln 2 (2 \cdot 4 + 2 \cdot 4) = -16 \ln 2$$

$$4 \ln 2 (x - 2) + 4 \ln 2 (y - 2) + (-16 \ln 2)(z - 1) = 0$$

$$4x \ln 2 + 4y \ln 2 - 16z \ln 2 + 8 \ln 2 = 0 \quad \text{jednačina tangentne ravni}$$

$$\frac{x - 2}{4 \ln 2} = \frac{y - 2}{4 \ln 2} = \frac{z - 1}{-16 \ln 2} \Rightarrow \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 1}{-4}$$

jednačina normale na površ

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na infoarrt@gmail.com